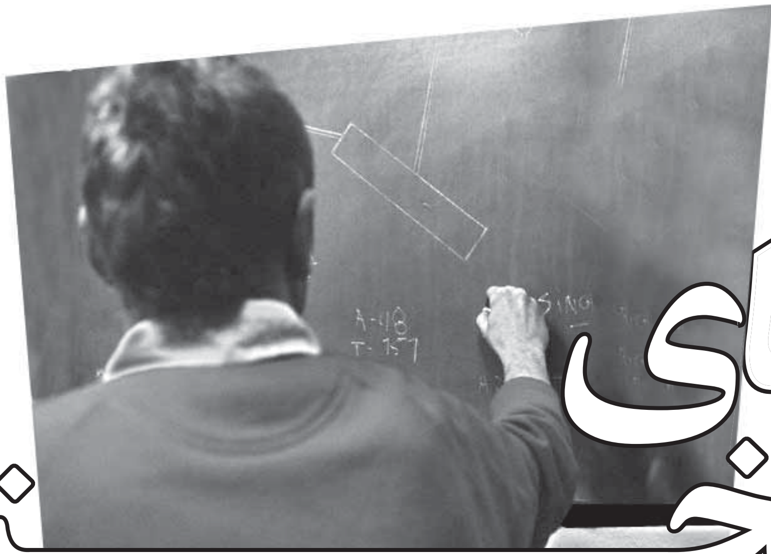
محرم نژاد ایردموسی*



پای تخته

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در فصل‌نامهٔ برهان است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از فصل‌نامه، تعدادی مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان مجله را به چالش می‌طلبد. همچنین، از خوانندگان مجله دعوت می‌کنیم که مسائل خود را برای انعکاس در مجله برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل خود را همراه با حل آن‌ها بفرستید.

شما می‌توانید مسائل و راه‌حل‌های خود را از طریق پستی (به آدرس فصل‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل‌نامه درج و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا خواهد شد.

همچنین می‌توانید با مراجعه به وبلاگ مجله ــ که نشانی آن در صفحه فهرست مجله آمده است ــ به مسائل شماره‌های آینده دسترسی پیدا کنید.

بخش اول: مسئله‌ها

۱۲۱. ثابت کنید معادلهٔ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$ در مجموعه اعداد طبیعی فرد، جواب ندارد.

۱۲۲. آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۹ را پشت‌سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، ...، و میان ۸ و ۹، عددی فرد باشد؟

۱۲۳. ثابت کنید عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری که جملات دنبالهٔ حسابی $a+b, a+2b, \dots, a+nb$ همگی مرکب باشند. a و b دو عدد طبیعی ثابت‌اند.

۱۲۴. a و b دو عدد طبیعی‌اند، به‌طوری که a^2+b^2 بر ۲۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید a^2+b^2 بر ۴۴۱ بخش‌پذیر است.

۱۲۵. یازده دانش‌آموز در اردویی تابستانی، پنج گروه پژوهشی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که می‌توان دو دانش‌آموز مانند A و B طوری پیدا کرد که هر گروه پژوهشی که شامل دانش‌آموز A باشد، شامل دانش‌آموز B هم باشد.

۱۲۶. طول تکه سیمی ۱۲۰ سانتی‌متر است. آیا می‌توان با استفاده از آن (بدون بریدن) اسکلت مکعبی را ساخت که طول هر یالش ۱۰ سانتی‌متر باشد؟

۱۲۷. ثابت کنید هر پنج‌ضلعی محدب، سه قطر دارد که می‌توان با آن‌ها یک مثلث رسم کرد.

۱۲۸. دو بازیکن به نوبت اسب‌هایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج می‌گذارند که هیچ‌یک از آن‌ها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی راهبرد برد دارد؟

۱۲۹. فرض کنید n، عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۵ است. ثابت کنید هر مربع را می‌توان فقط با برش‌های افقی و عمودی، به n مربع تقسیم کرد.

۱۳۰. در جدولی از m سطر و n ستون، خانهٔ محل برخورد سطر fاُم و ستون gاُم را علامت گذاشته‌ایم. چند تا از مستطیل‌هایی که از خانه‌های این جدول تشکیل شده‌اند، این خانهٔ علامت‌دار را دربردارند؟

بخش دوم:

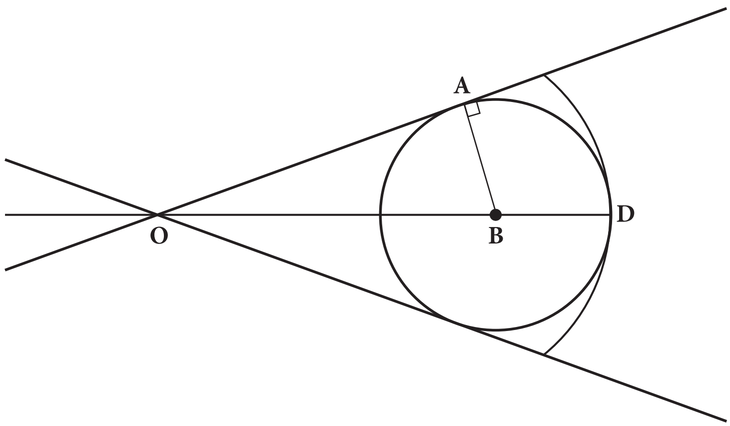
راه‌حل‌ها

۶۱. تابع f مفروض است، به‌طوری که به‌ازای هر $x,y\in R$ داریم: $f(x+y)=f(x)f(y)$. اگر $f(۲)=۵$، مطلوب است مقدار $f(n)$ برحسب n برای $n\in Z$.

قرار دهید $y=۰$ و $x=۲$. داریم: $f(۲)=f(۰)f(۲)$. در نتیجه: $f(۰)=۱$. سپس قرار دهید $x=y=۱$. داریم: $۵=f(۲)=(f(۱))^۲$. در نتیجه: $-\sqrt{۵}$ یا $f(۱)=\sqrt{۵}$. حال به روش استقرا می‌توان ثابت کرد برای هر $n\in N$ داریم: $f(n)=(f(۱))^n$ و $f(-n)=(f(۱))^{-n}$. در نتیجه دو جواب برای f وجود دارد: $f(n)=(-\sqrt{۵})^n$ و $f(n)=(\sqrt{۵})^n$.

۶۲. دو قطر از دایرهٔ C را رسم کرده‌ایم، به‌طوری که این دو قطر با هم زاویهٔ ۳۰ درجه می‌سازند. اگر دایره‌ای به شعاع ۱ طوری رسم شده باشد که به دو قطر مذکور و دایرهٔ C مماس باشد، شعاع دایرهٔ C حداکثر چه‌قدر است؟

زاویهٔ AOB پانزده درجه است و $AB=۱$. در نتیجه: $OB=\frac{AB}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}$. بنابراین شعاع دایرهٔ C برابر است با: $OC=OB+BD=۱+\frac{۱}{\sin ۱۵^\circ}$.



شکل ۱

۶۳. با فرض $۰\le x\le y\le ۱$، مطلوب است کم‌ترین مقدار ماکزیمم سه عدد زیر:

$xy,\ ۱-x-y+xy\ ,\ x+y-۲xy$

راه‌حل ارائه شده توسط **محمد طبیعی** از تهران:

داریم:

$(۱-۲x)(۱-۲y)=xy+(۱-x-y+xy)-(x+y-۲xy)$.

در نتیجه اگر یکی از دو عدد x و y از $\frac{۱}{۲}$ کمتر یا مساوی با آن و دیگری از $\frac{۱}{۲}$ بیشتر یا مساوی با آن باشد، آن‌گاه داریم:

$$xy+(۱-x-y+xy)\le x+y-۲xy \Rightarrow \frac{۱}{۲}\le x+y-۲xy$$

در این حالت کمترین مقدار ماکزیمم برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که x و y هر دو از $\frac{۱}{۲}$ کمتر یا هر دو بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ باشند. سه عدد داده شده به‌صورت xy، $(۱-x)(۱-y)$ و $x(۱-y)+y(۱-x)$ هستند. پس بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد x و y هر دو از $\frac{۱}{۲}$ بیشترند و: $xy>(۱-x)(۱-y)$. پس ماکزیمم، بین دو عدد xy و $x+y-۲xy$ خواهد بود.

با ثابت گرفتن y و تغییر دادن x، تغییرات دو تابع $f(x)=xy$ و $g(x)=x+y-۲xy$ را در بازهٔ $\left[\frac{۱}{۲},۱\right]$ بررسی می‌کنیم. به‌راحتی دیده می‌شود اگر $x< M$، آن‌گاه:

$f(M)>f(x)$ و $g(M)<g(x)$.

از طرفی داریم: $t(x)=g(x)-f(x)=x+y-۳xy$،

$t(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}+y-\frac{۳}{۲}y=\frac{۱}{۲}-\frac{y}{۲}>۰$ و $t(۱)=۱-۲y<۰$.

لذا $t(x)$ ریشه‌ای بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ دارد. پس $\frac{۱}{۲}<M\le ۱$ موجود است، به‌طوری که: $f(M)=g(M)$. به‌راحتی می‌توان نشان داد کمترین مقدار ماکزیمم در M اتفاق می‌افتد که در این حالت داریم: $M=\frac{y}{۳y-۱}$ و $g(M)=f(M)=\frac{y^۲}{۳y-۱}$.

از طرف دیگر:

$$(۳y-۲)^۲\ge ۰\Rightarrow ۹y^۲+۴-۱۲y\ge ۰$$

$$\Rightarrow ۹y^۲\ge ۴(۳y-۱)\Rightarrow \frac{y^۲}{۳y-۱}\ge\frac{۴}{۹}$$

در نتیجه کمترین مقدار ماکزیمم برابر است با $\frac{۴}{۹}$ که به ازای $x=y=\frac{۲}{۳}$ اتفاق می‌افتد.

۶۴. فرض کنید r، شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد. اگر $r_۱$ و $r_۲$ به‌ترتیب برابر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث‌های ABC و ACD باشند، ثابت کنید r، $r_۱$ و $r_۲$ می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند.

$$AB+AD+BD<AB+AC+BC$$

$$\Rightarrow\frac{۲S_{ABD}}{AB+AD+BD}>\frac{۲S_{ABD}}{AB+AC+BC}$$

$$AC+AD+CD<AB+AC+BC$$

$$\Rightarrow\frac{۲S_{ACD}}{AC+AD+CD}>\frac{۲S_{ACD}}{AB+AC+BC}$$

در نتیجه:

$$r_۱+r_۲>\frac{۲(S_{ABD}+S_{ACD})}{AB+AC+BC}=\frac{۲S_{ABC}}{AB+AC+BC}=r$$

بنابراین، $r_۱$، $r_۲$ و r در نابرابری‌های مثلثی صدق می‌کنند و می‌توانند طول‌های اضلاع یک مثلث باشند.

▣ **نکته:** در محاسبهٔ $r_۱$، $r_۲$ و r دستور محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی هر مثلث، یعنی $r=\frac{S}{P}$ مورد استفاده قرار گرفته است. در این دستور S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث است.

۶۵. مجموعهٔ $X=\{۱,۲,...,n\}$ چند زیرمجموعهٔ k عضوی دارد که شامل عدد k نباشد؟

اگر k مقداری ثابت باشد باید از $X-\{k\}$، k عضو انتخاب کنیم. پس $\binom{n-۱}{k}$ انتخاب وجود دارد. اگر k بتواند هر مقداری باشد، آن‌گاه پاسخ $N=\binom{n-۱}{۱}+\binom{n-۱}{۲}+...+\binom{n-۱}{n-۱}$ یا $N=۲^{n-۱}-۱$ خواهد بود.

۶۶. نشان دهید $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ عددی گویا است.

با فرض $A=\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$ دو طرف تساوی را به توان ۳ می‌رسانیم. داریم:

$$A^۳=۲+\sqrt{۵}+۲-\sqrt{۵}+۳A\sqrt[۳]{۴-۵}$$

در نتیجه: $A^۳+۳A-۴=۰$. بنابراین باید: $(A-۱)(A^۲+A+۴)=۰$. چون معادله فقط یک ریشه دارد، در نتیجه: $A=۱$.

راه‌حل دوم (از هوشنگ شرقی):

$$۲+\sqrt{۵}=(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})^۳,۲-\sqrt{۵}=(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})^۳$$

$$\Rightarrow\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}=۱$$

۶۷. مطلوب است ریشه‌های معادلهٔ
$(x^۲+۳x+۲)(x^۲-۷x+۱۲)(x^۲-۲x-۱)+۲۴=۰$

$(x^۲+۳x+۲)(x^۲-۷x+۱۲)(x^۲-۲x-۱)+۲۴$

$=(x+۱)(x+۲)(x-۳)(x-۴)(x^۲-۲x-۱)+۲۴$

$=(x^۲-۲x-۳)(x^۲-۲x-۸)(x^۲-۲x-۱)+۲۴$

$=(a-۳)(a-۸)(a-۱)+۲۴=a(a-۵)(a-۷)$

کـه در آن: $a=x^۲-۲x$. در نتیجـه بـه سـه معادلهٔ $x^۲-۲x=۰$، $x^۲-۲x=۵$ و $x^۲-۲x=۷$ می‌رسـیم. به راحتی مشخص می‌شـود که ریشـه‌های معادله عبارت‌اند از: ۰، ۲، $۱\pm\sqrt{۶}$ و $۱\pm\sqrt{۸}$.

۶۸. علی تعدادی برگهٔ کاغذ دارد و تعداد کاغذها عددی بین ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ است. او سعی می‌کند برگه‌ها را به دسـته‌های ۲تایی تقسـیم کند. در نهایت یک برگه اضافه می‌آید. در تقسـیم برگه‌هـا به دسـته‌های ۳تایی، به دسـته‌های ۴تایی، ...، به دسته‌های ۸تایی نیز همین اتفاق تکرار می‌شود (یک برگه اضافه می‌ماند). علی چند برگه کاغذ دارد؟

اگر n تعداد برگه‌ها باشـد، آن‌گاه n-۱ بر ۲، ۳، ...، ۸ بخش‌پذیر اسـت. در نتیجه باید n-۱ بر کوچک‌ترین مضرب مشـترک آن‌ها بخش‌پذیر باشد. در نتیجه باید n-۱ مضرب ۸۴۰ باشد. تنها عدد ممکن $n=۲*۸۴۰+۱$ است. پس: $n=۱۶۸۱$.

۶۹. $f(x)$ یـک چندجملـه‌ای از درجـهٔ ۴ اسـت به‌طوری که $f(-۱)=-۱$، $f(۲)=-۴$، $f(-۳)=-۹$ و $f(۴)=-۱۶$. مطلوب است مقدار $f(۱)$.

تابع $g(x)=f(x)+x^۲$ را در نظر بگیرید. داریم:
$g(-۳)=f(-۳)+۹=۰$ و $g(۲)=f(۲)+۴=۰$ و
$g(-۱)=f(-۱)+(-۱)^۲=۰$ و $g(۴)=f(۴)+۱۶=۰$.

در نتیجه چندجملـه‌ای درجهٔ چهارم g بر $(x+۱)$، $(x-۲)$، $(x+۳)$ و $(x-۴)$ بخش‌پذیـر اسـت. در نتیجـه: $g(x)=k(x+۱)(x-۲)(x+۳)(x-۴)$.

بنابراین: $f(x)=k(x+۱)(x-۲)(x+۳)(x-۴)-x^۲$. پس: $f(۱)=۲۴k-۱$.

۷۰. مربع‌هـای ABKL، BCMN و CAOP روی اضلاع مثلث ABC و خارج مثلث بنا شـده‌اند. پاره‌خط‌های KL، MN و OP را امتداد می‌دهیم تا مثلث A´B´C´ ایجاد شود. اگر ABC مثلثی متسـاوی‌الاضلاع به ضلع ۲ باشـد، مساحت مثلث A´B´C´ را به‌دست آورید.

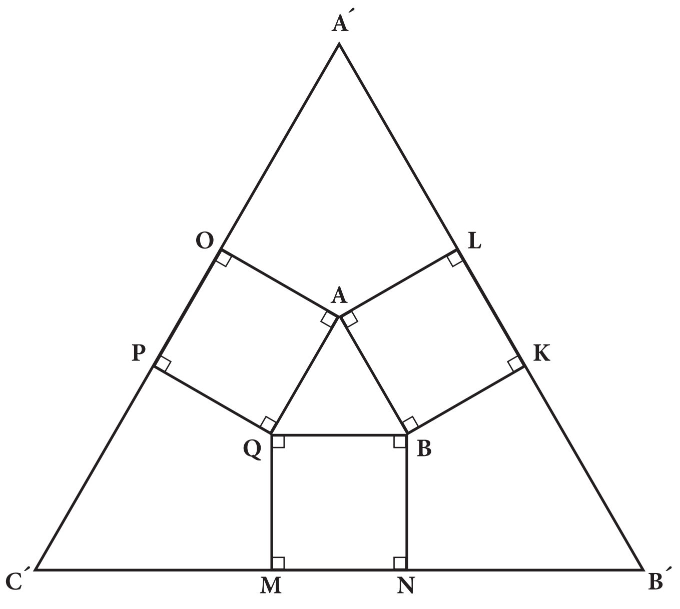
چون اضلاع A´B´C´ با اضلاع ABC موازی هستند، پس دو مثلث متشـابه‌اند و A´B´C´ متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر، شش مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر و یک ضلع با هم هم‌نهشت خواهند شد (چرا؟) و زوایای داخلی هر کدام °۳۰ و °۶۰ خواهد شد. در نتیجه:

$$A'L=KB'=\sqrt{۱۶-۴}=۲\sqrt{۳}$$

یعنی ضلع مثلث متسـاوی‌الاضلاع A´B´C´ برابر است با $۲+۴\sqrt{۳}$ و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲+۴\sqrt{۳})^۲=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۵۲+۱۶\sqrt{۳})$$

$$=۱۳\sqrt{۳}+۱۲$$



شکل ۲

* iradmusa@yahoo.com